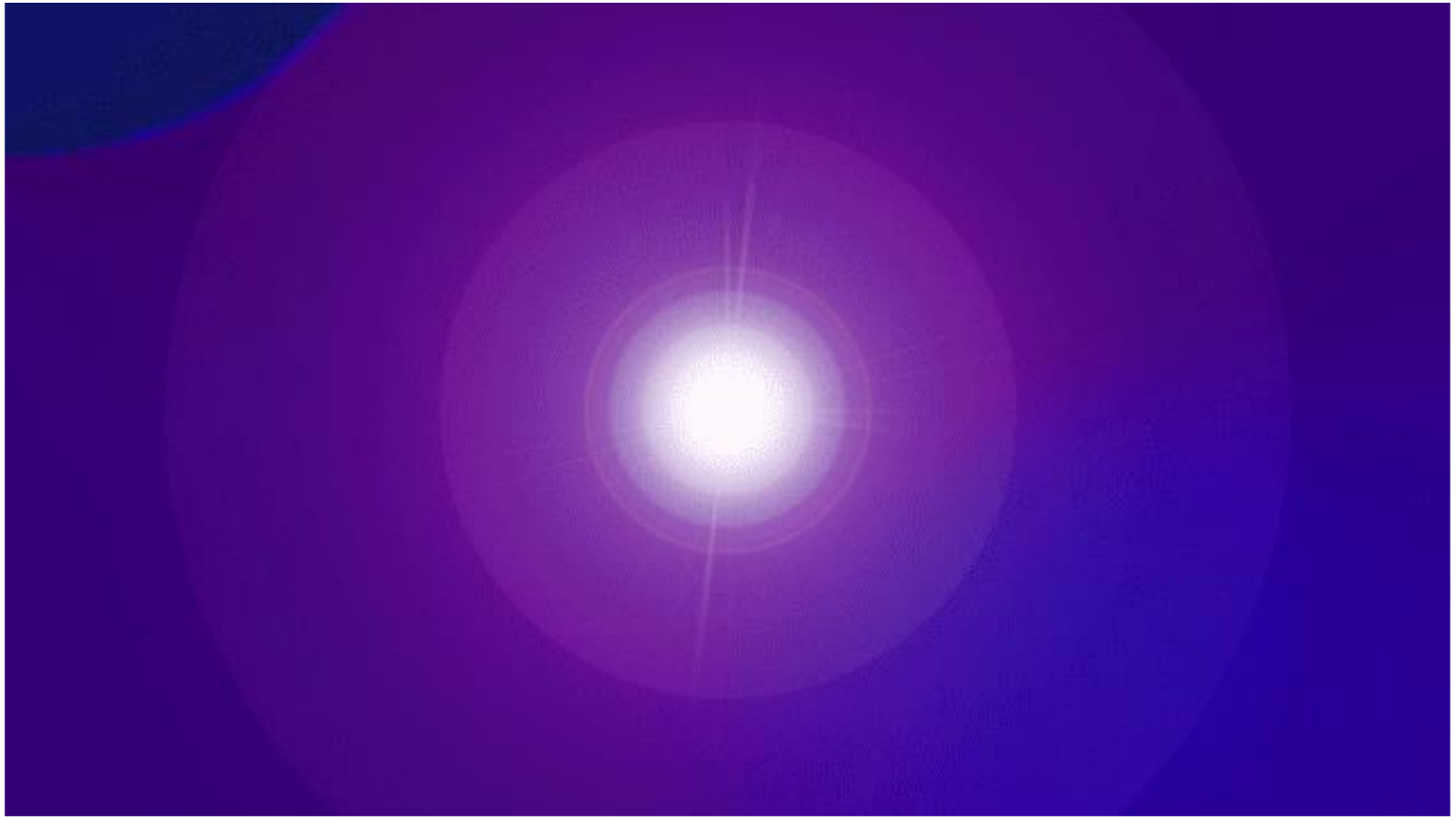
PITAGORAS
ACADEMIA

GEOMETRÍA

Profesor:
Marco Almerco

TRIÁNGULO



LÍNEAS NOTABLES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

DEFINICIONES

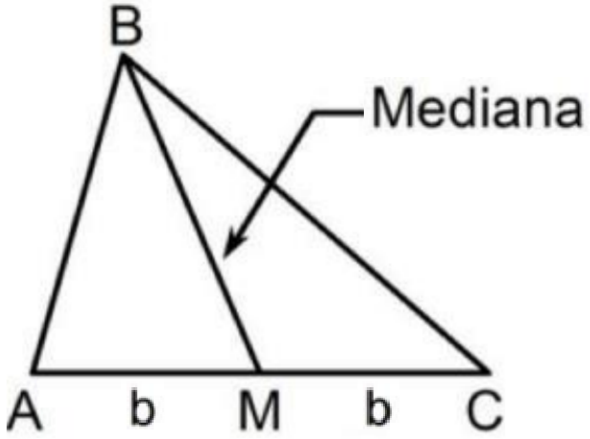
PROPIEDADES CON LAS LÍNEAS NOTABLES

DEFINICIONES DE LOS PUNTOS NOTABLES ASOCIADOS AL TRIÁNGULO

DEFINICIONES

1) Mediana

Segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

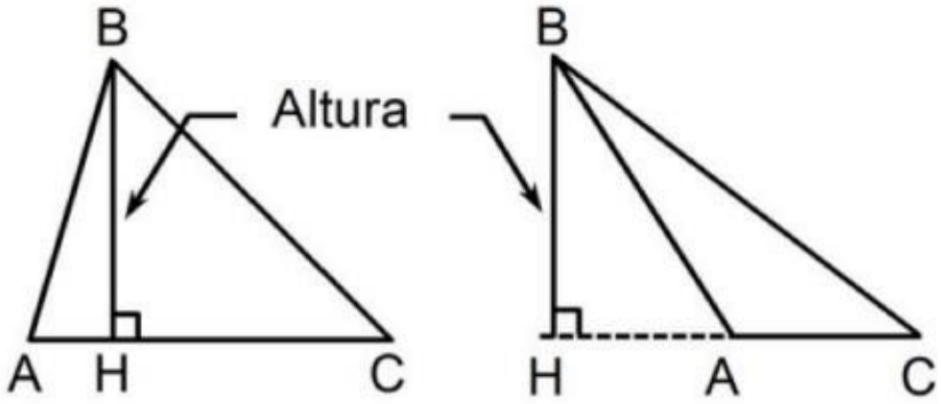


Si M es punto medio de $\overline{AC}$, entonces: $\overline{BM}$ es la mediana trazada desde B a $\overline{AC}$ o mediana relativa al lado $\overline{AC}$ del triángulo ABC.

En un triángulo se pueden trazar tres medianas.

2) Altura

Es el segmento perpendicular, trazado desde un vértice, a la recta que contiene al lado opuesto y cuyo otro extremo está en dicha recta.



Si $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, entonces $\overline{BH}$ es la altura trazada desde B o altura correspondiente al lado $\overline{AC}$ o altura relativa al lado $\overline{AC}$ del triángulo ABC.

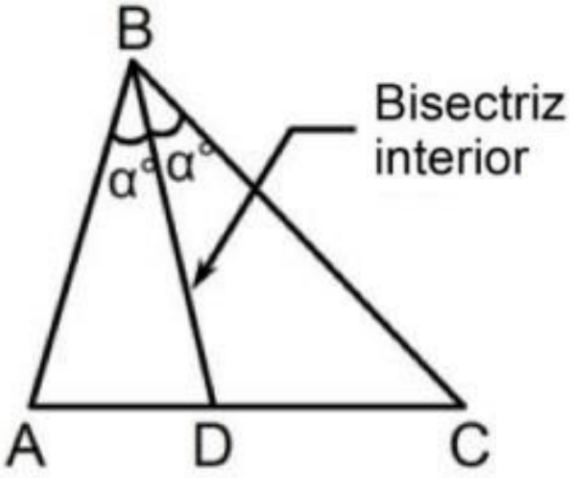
En un triángulo se pueden trazar tres alturas.

DEFINICIONES

3) Bisectriz

a) Bisectriz interior

Segmento de una bisectriz interior de un ángulo de un triángulo, cuyos extremos son el vértice de dicho ángulo y el punto de corte con el lado opuesto.

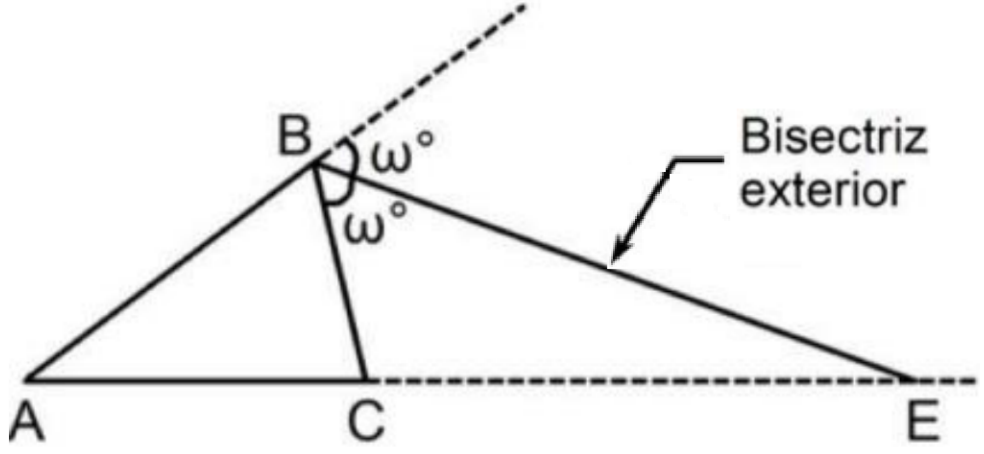


$\overline{BD}$ es una bisectriz interior del triángulo ABC.

En un triángulo se pueden trazar tres bisectrices interiores.

b) Bisectriz exterior

Bisectriz exterior es el segmento de bisectriz de un ángulo externo de un triángulo, cuyos extremos son el vértice del ángulo y su punto de intersección con la recta que contiene al lado opuesto.



$\overline{BE}$ es una bisectriz exterior del triángulo ABC.

(La bisectriz exterior se inclina hacia el menor lado)

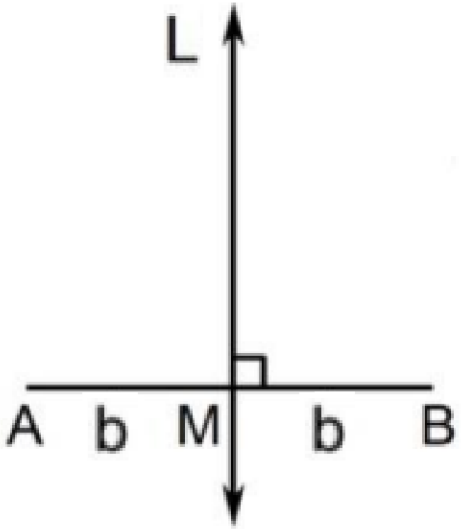
$$AB > BC$$

DEFINICIONES

Observaciones

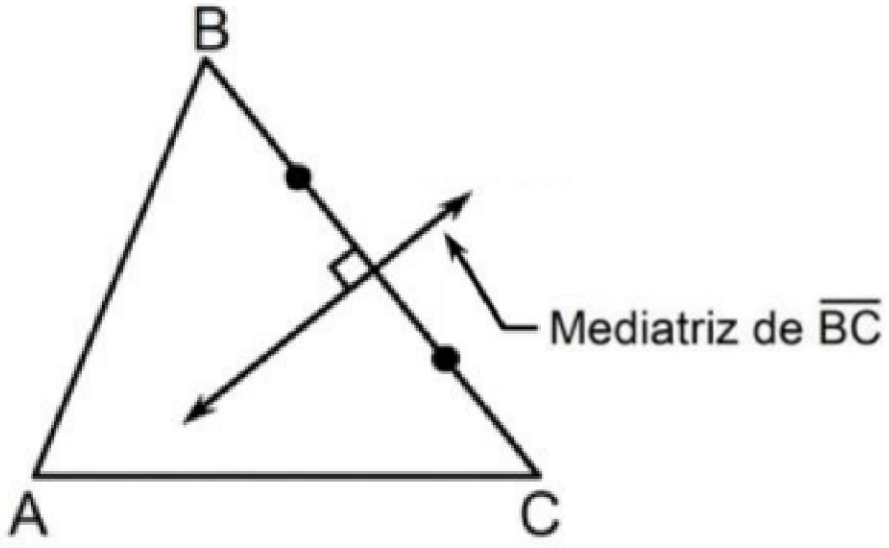
1) Mediatriz de un segmento

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento en su punto medio.



$\overleftrightarrow{L}$: Mediatriz de $\overline{AB}$

En el plano del triángulo ABC podemos trazar la mediatriz de uno de sus lados, como muestra la figura:

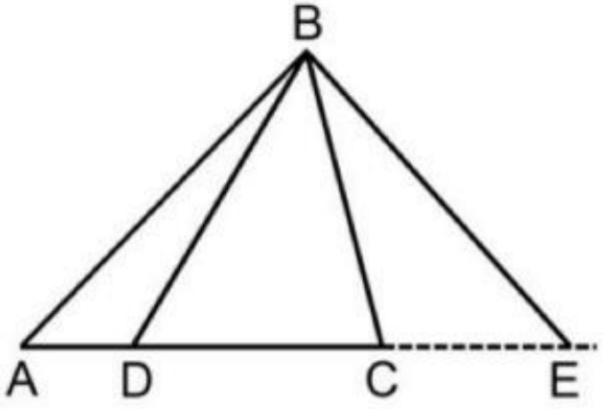


En un triángulo se pueden trazar tres mediatrices.

DEFINICIONES

2) Ceviana

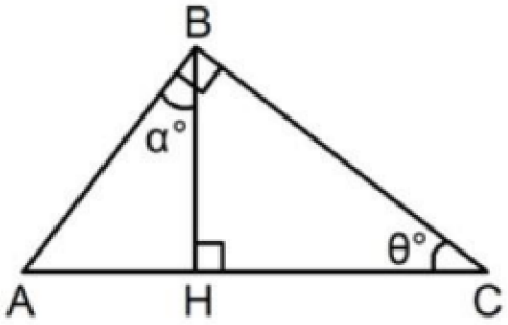
Se denomina ceviana al segmento de recta cuyos extremos son un vértice del triángulo y un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación.



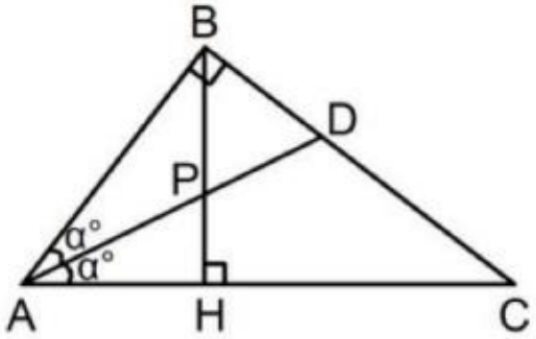
$\overline{BD}$: Ceviana interior

$\overline{BE}$: Ceviana exterior

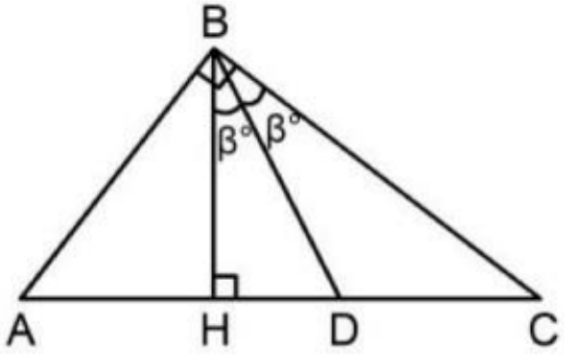
Propiedades en los triángulos rectángulos



$\alpha = \theta$



$BP = BD$



$AB = AD$

DEFINICIONES

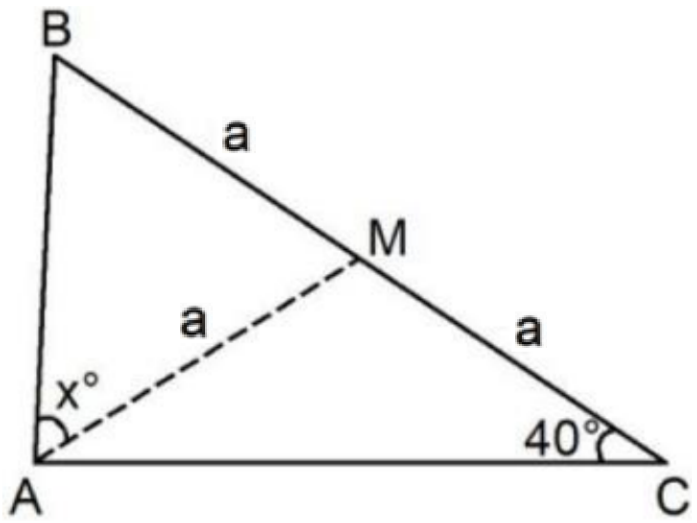
Ejemplo 01

En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$, tal que AM=MB. Si m∠C=40, calcular m∠MAB.

Resolución:

Graficamos y colocamos los datos. Nos piden m∠MAB=x

Datos: $\overline{AM}$ es mediana y AM=MB

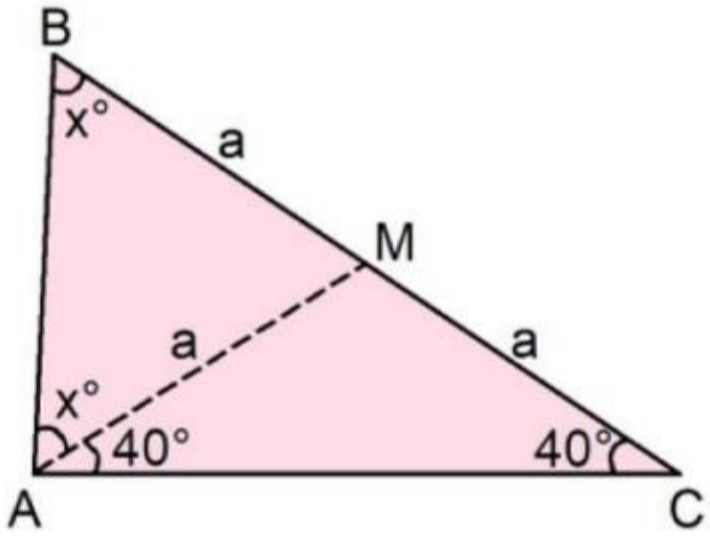


De los datos, se deduce: BM=MC=a=AM

Ahora tenemos dos triángulos isósceles (ver gráfico), en los cuales debemos indicar sus ángulos congruentes.

ΔAMC: m∠C = m∠MAC = 40

ΔBMA: m∠MAB = x = m∠MBA



Finalmente en el triángulo ABC:

$$(x + 40) + x + 40 = 180$$

$$\therefore x = 50$$

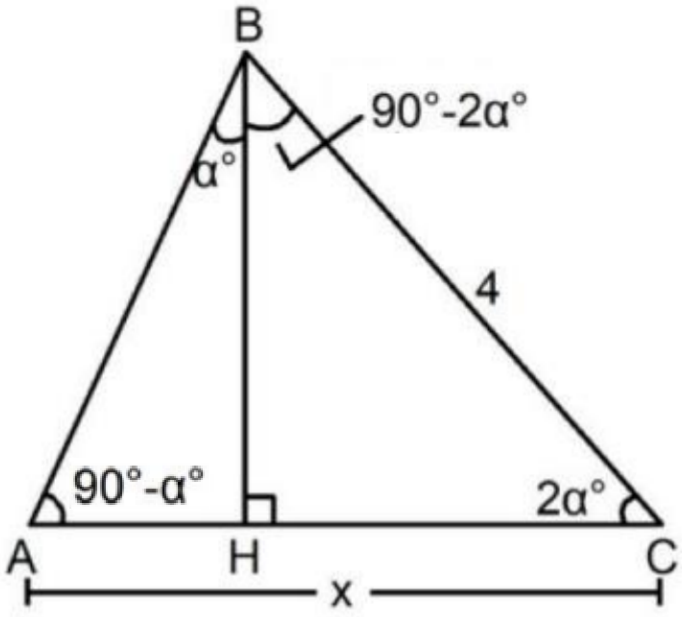
DEFINICIONES

Ejemplo 02

En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ tal que m∠C=2(m∠ABH). Calcular AC, si BC=4.

Resolución:

Graficamos y colocamos los datos. Se pide: AC=x



Dato: m∠C=2(m∠ABH)

Sea: m∠ABH=α → m∠C=2α

En el ΔAHB: m∠HAB=90 - α

En el ΔBHC: m∠HBC=90 - 2α

Luego se observa que:

m∠BAC = m∠ABC = 90 - α

Es decir el triángulo ABC es isósceles:

$$\therefore x = 4$$

DEFINICIONES

EJEMPLO

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La mediana de un triángulo está contenida en el interior del triángulo.

II. Todo triángulo tiene tres bisectrices exteriores.

III. La altura de un triángulo es el segmento perpendicular trazado desde un vértice a la recta que contiene al lado opuesto.

A) VVV B) VFV C) FFV

D) FFF E) FVV

Resolución:

DEFINICIONES

Ejemplo 03

En el triángulo ABC: $\overline{BD}$ es bisectriz interior. Si m∠BAC - m∠BCA = 60, calcular m∠BDA.

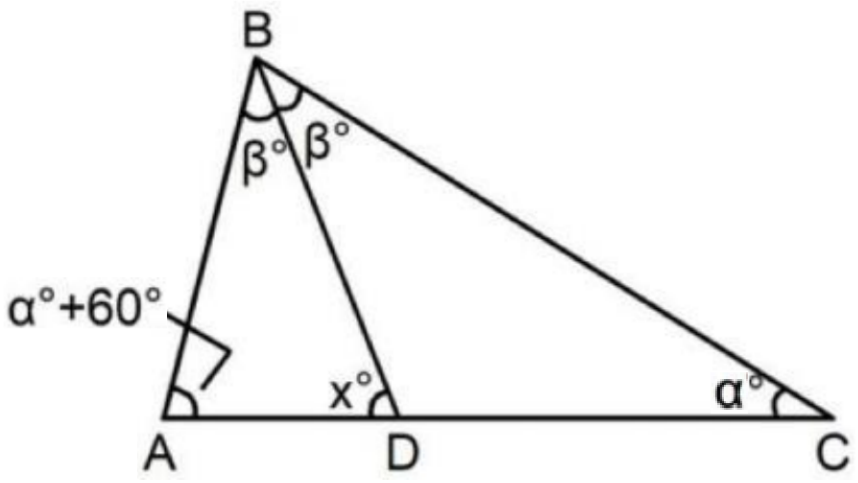
Resolución:

Graficamos y colocamos los datos. Se pide: m∠BDA=x

Dato: m∠BAC - m∠BCA = 60
Sea m∠BCA=α → m∠BAC=α+60

En el triángulo BDC, por ángulo exterior:

$$x = \alpha + \beta$$



Es decir el triángulo ABC:

$$(\alpha + 60) + 2\beta + \alpha = 180$$

Entonces:

$$\alpha + \beta = 60$$

$$\therefore x = 60$$

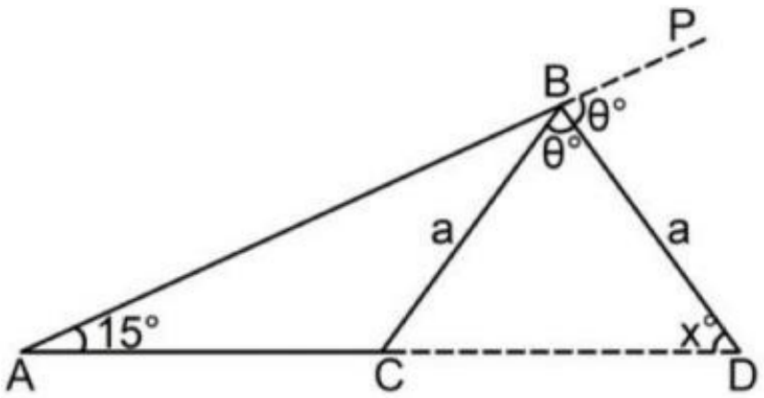
DEFINICIONES

Ejemplo 04

En un triángulo ABC: m∠A=15, se traza la bisectriz exterior $\overline{BD}$ (D en la prolongación de $\overline{AC}$). Si CB=BD, calcular m∠ADB.

Resolución:

Graficamos y colocamos los datos. Se pide: m∠ADB=x

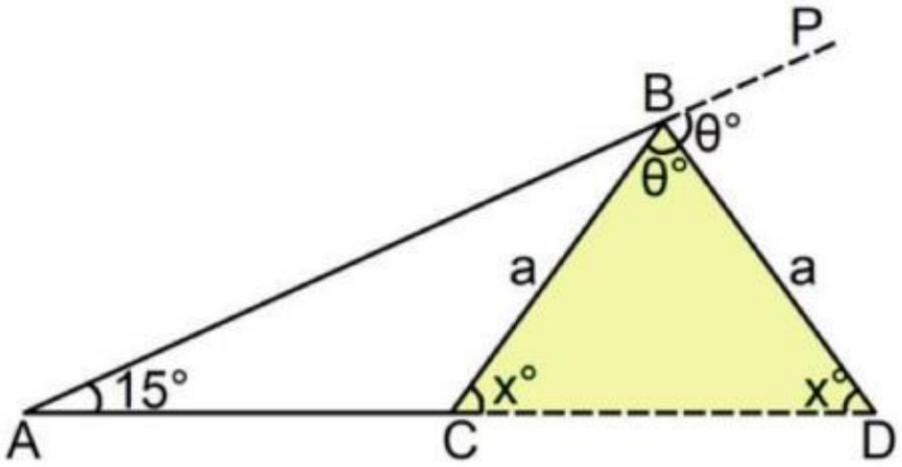


En el ΔAFC (isósceles):

m∠BDC = m∠BCD = x

En ΔABD, por ángulo exterior:

m∠PBD = θ = 15 + x



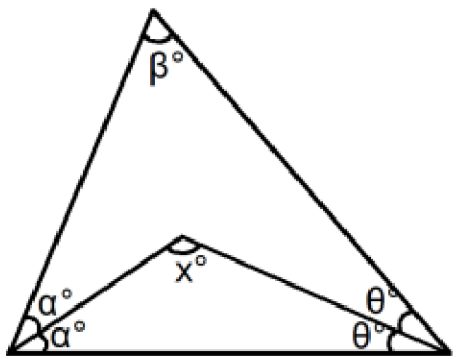
Ahora en el triángulo CBD:

$$2x + \theta = 180$$

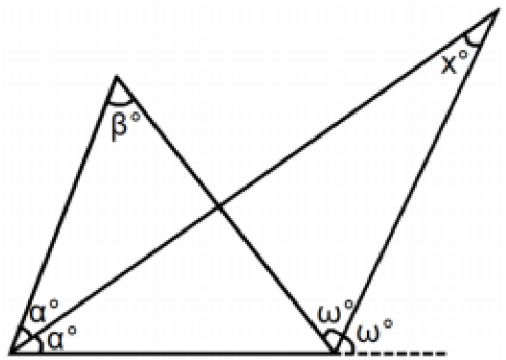
$$2x + (15 + x) = 180$$

$$\therefore x = 55$$

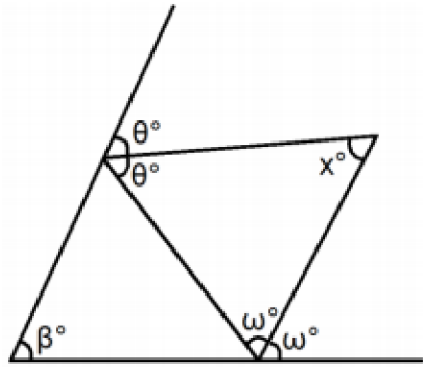
PROPIEDADES CON LÍNEAS NOTABLES



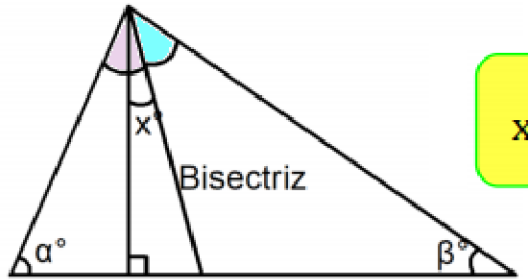
$$x = 90 + \frac{\beta}{2}$$



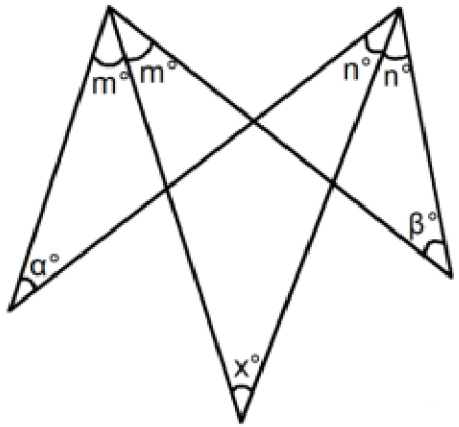
$$x = \frac{\beta}{2}$$



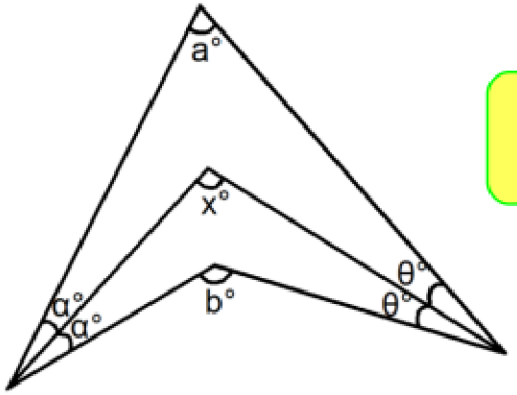
$$x = 90 - \frac{\beta}{2}$$



$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$



$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$



$$x = \frac{a + b}{2}$$

PROPIEDADES CON LÍNEAS NOTABLES

Ejemplo 05

En el triángulo ABC:

$$m\angle A+m\angle B+2(m\angle C)=230,$$

calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos A y B.

Resolución:

En el triángulo ABC sea P el punto de corte de las bisectrices de los ángulos A y B.

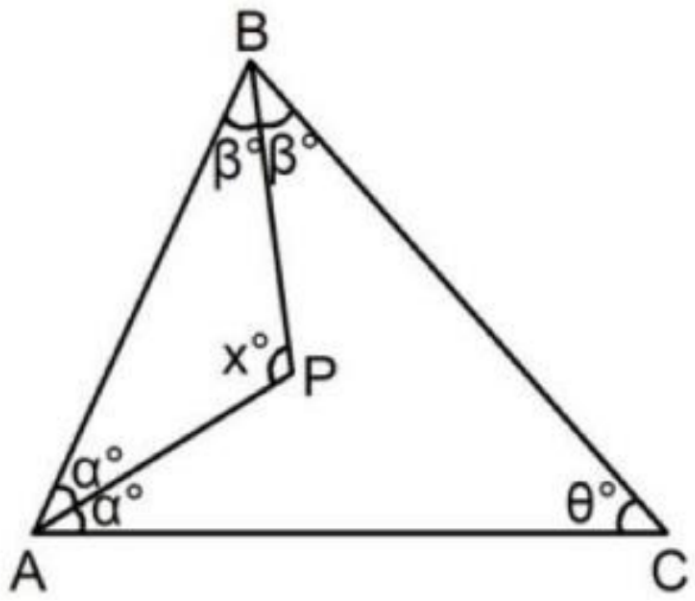
Se pide: $m\angle APB = x$

Dato: $m\angle A + m\angle B + 2(m\angle C) = 230$

En el dato:

$$\underbrace{m\angle A + m\angle B + m\angle C}_{180} + m\angle C = 230$$

Entonces: $m\angle C=50$



Finalmente en el ΔABC, por propiedad:

$$x = 90 + \frac{\theta}{2} = 90 + \frac{50}{2}$$

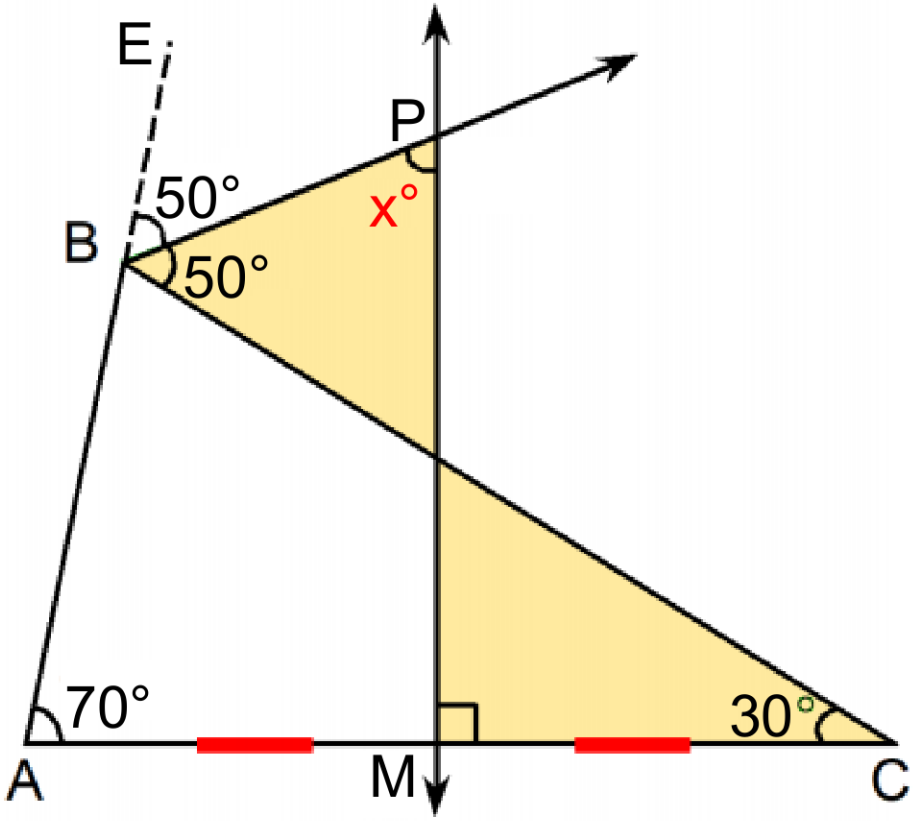
$$\therefore x = 115$$

PROPIEDADES CON LÍNEAS NOTABLES

Ejemplo 05

En el triángulo ABC: m∠A=70 y m∠C=30. Calcular la medida del menor ángulo que forman la mediatriz de $\overline{AC}$ y la bisectriz exterior del ángulo B.

Resolución: Hacemos el dibujo correspondiente.



Sea P el punto de intersección de la bisectriz exterior del ángulo B y la mediatriz de $\overline{AC}$ (M es punto medio de $\overline{AC}$).

Se pide: m∠BPM = x

En el ΔABC, por ángulo exterior:

$$m\angle EBC = 100$$

Luego:

$$m\angle EBP = m\angle PBC = 50$$

Finalmente por propiedad:

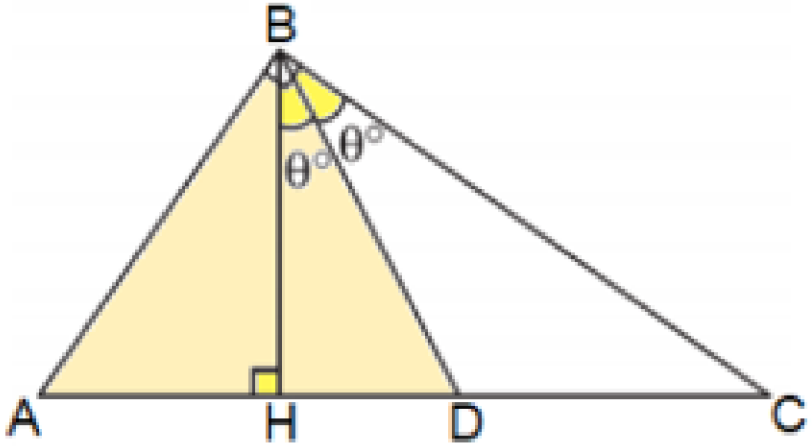
$$50 + x = 90 + 30$$

$$\therefore x = 70$$

PROPIEDADES CON LÍNEAS NOTABLES

Ejemplo:

En un triángulo rectángulo ABC: $\overline{BH}$ es altura, $\overline{BD}$ es bisectriz, AH=4 y HD=3. Hallar el valor de AB.



RESOLUCIÓN:

- En el gráfico, se observa:

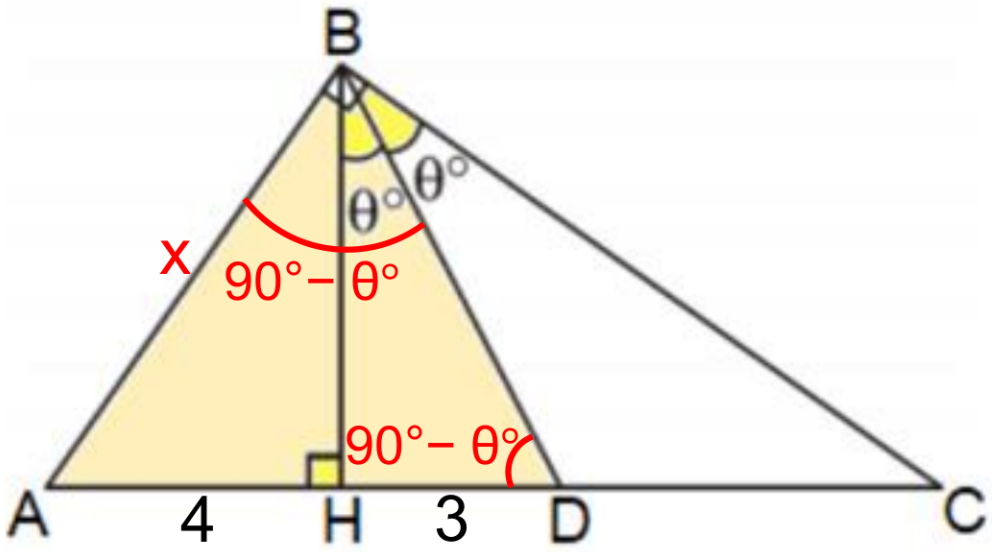
  $\overline{BD}$: Bisectriz del ∠HBC

- Luego, se observa:

  m∠ABD + m∠DBC = 90°

  ⇒ m∠ABD + θ = 90°

  ⇒ m∠ABD = 90°− θ°



- ΔBHD es rectángulo.

  m∠HBD + m∠HDB = 90°

  ⇒ m∠HDB + θ = 90°

  ⇒ m∠HDB = 90°− θ°

- Se observa que al completar los ángulos el ΔABD es isósceles.

  ⇒ AB = AD = 4 + 3 = 7

  ∴ x = 7

PROPIEDADES CON LÍNEAS NOTABLES

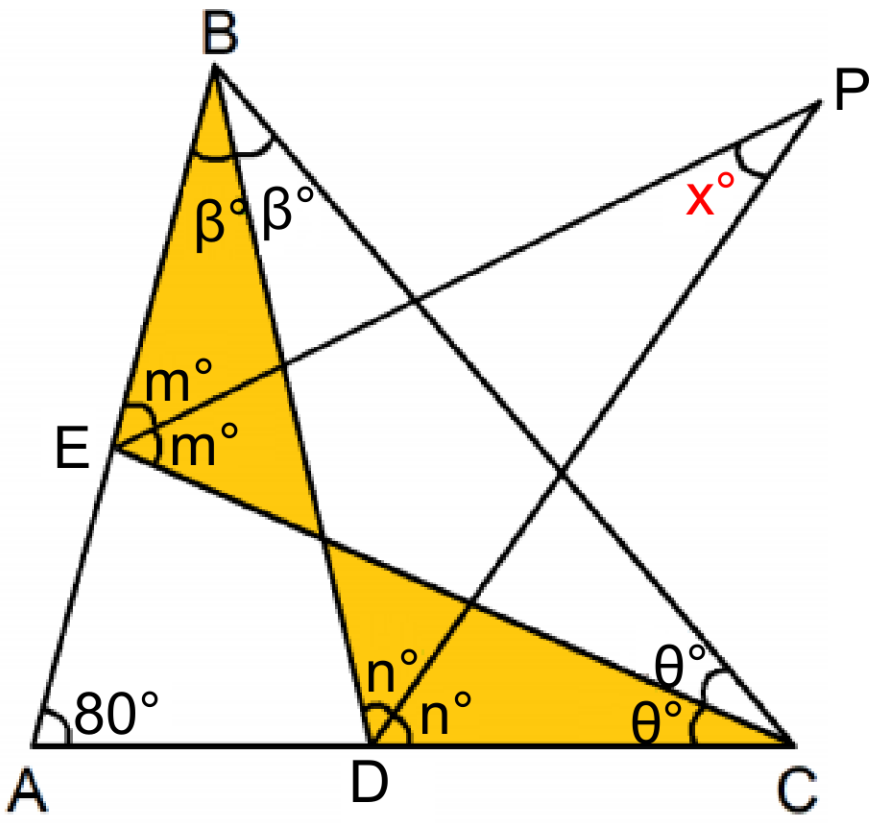
Ejemplo 09

En el triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$. Si m∠A=80, calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos BEC y BDC.

Resolución:

Sea P el punto de corte de las bisectrices de los ángulos BEC y BDC:

Se pide: m∠EPD=x.



En el triángulo ABC:

$$80 + 2\beta + 2\theta = 180$$

$$\rightarrow \beta + \theta = 50$$

Por propiedad: $x = \dfrac{\beta + \theta}{2} = \dfrac{50}{2}$

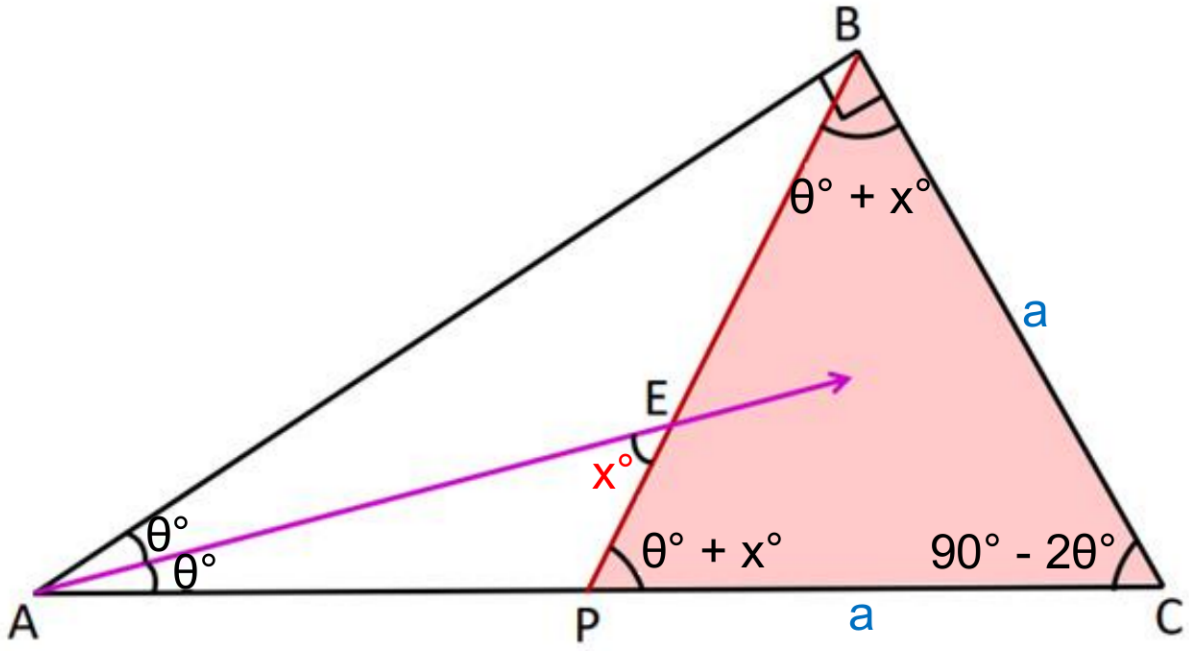
$$\therefore x = 25$$

PROPIEDADES CON LÍNEAS NOTABLES

Ejemplo:

Dado un triángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior $\overline{BP}$ de modo que PC=BC. Calcular la medida del ángulo agudo que determinan la bisectriz del ángulo BAC y $\overline{BP}$.

RESOLUCIÓN:



Sea "E" el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A y $\overline{BP}$.

En el ΔABC:

m∡BAE = m∡EAC = θ y m∡C = 90 - 2θ

Por ∡ exterior en el ΔAEP: m∡EPC = θ + x

Pero por dato BC = PC, entonces:

m∡BPC = m∡PBC = θ + x

Finalmente en el triángulo PBC:

(θ+ x)+ (θ + x) + (90 - 2θ) = 180

2x = 90

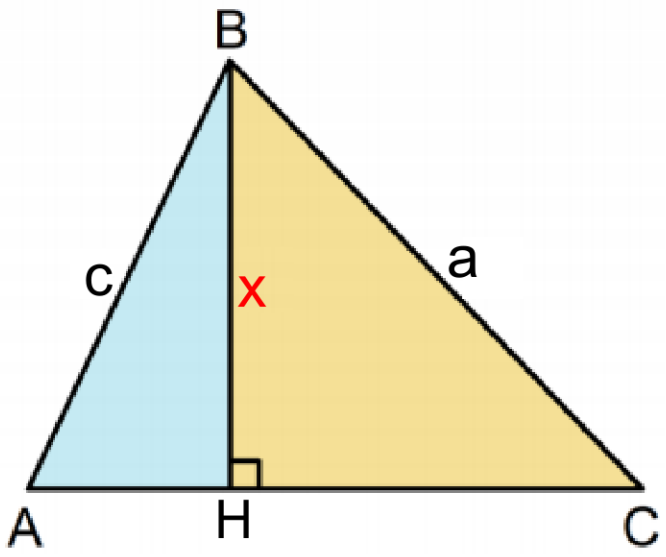
∴ x = 45

PROPIEDADES CON LÍNEAS NOTABLES

Ejemplo:

En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$. Si AB+BC=15, calcular el mayor valor entero de BH.

RESOLUCIÓN:



Sea BH=x, se pide: $x_{máx}$ ($x \in Z$)

Dato: AB+BC=15 → c+a=15

En el ΔAHB: $x < c$ ... (1)

En el ΔBHC: $x < a$ ... (2)

De (1) + (2): $2x < \underbrace{c + a}_{15}$

$2x < 15$

$x < 7{,}5$

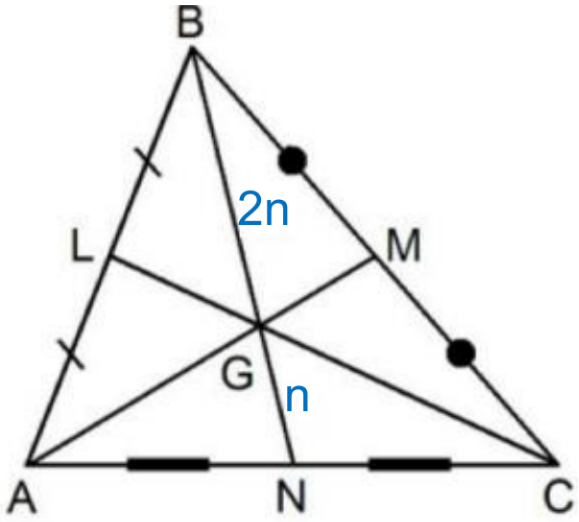
$\therefore x_{máx} = 7$

PUNTOS NOTABLES

1) Baricentro

Todo triángulo tiene tres medianas las cuales concurren en un punto denominado Baricentro (G).

El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos cuyas medidas están en la razón 2 a 1.



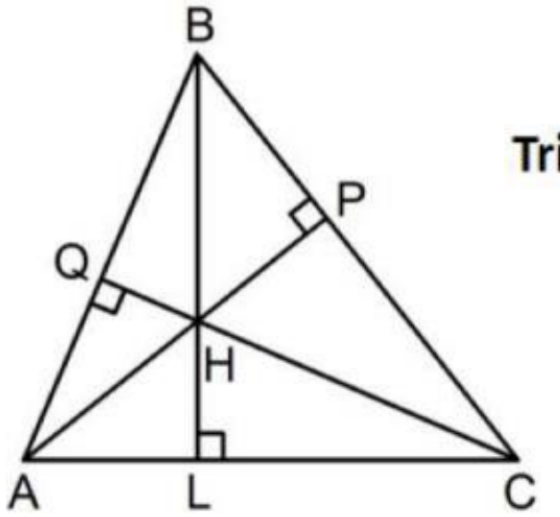
G: Baricentro

Propiedad

BG=2(GN)

2) Ortocentro

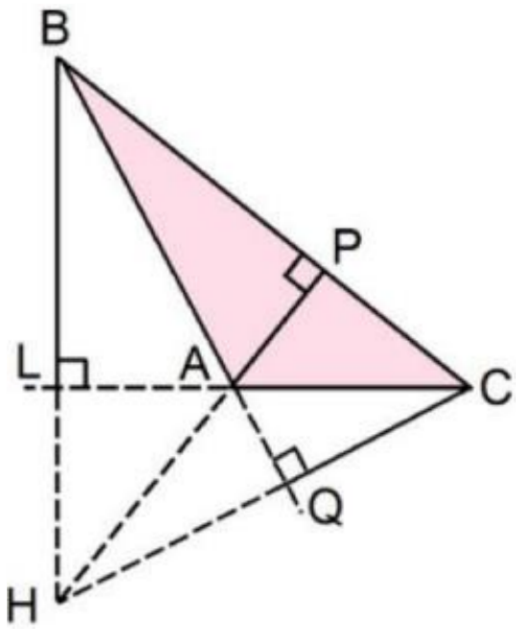
Todo triángulo tiene tres alturas, trazadas desde cada vértice. Las rectas que contienen a las tres alturas se intersecan en un punto denominado Ortocentro (H).



Triángulo acutángulo

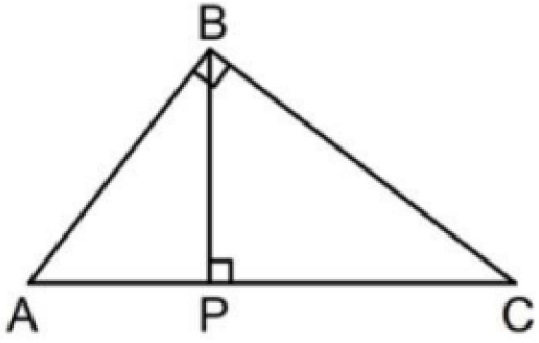
H: Ortocentro

PUNTOS NOTABLES



Triángulo obtusángulo

H: Ortocentro

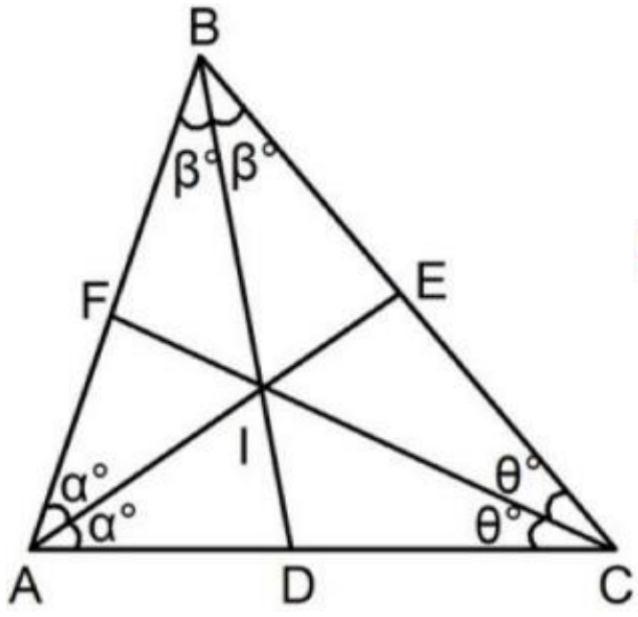


Triángulo rectángulo

B: Ortocentro

3) Incentro

Todo triángulo tiene tres bisectrices interiores las cuales concurren en un punto denominado Incentro (I).

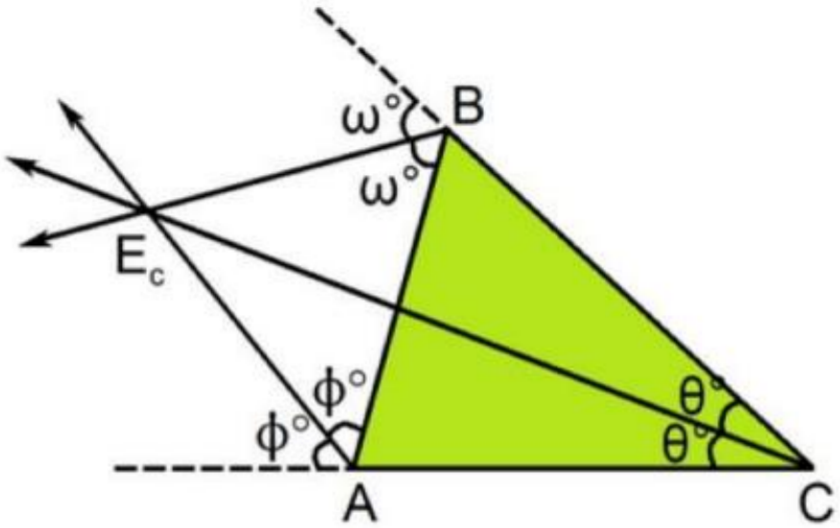


I: Incentro

PUNTOS NOTABLES

4) Excentro

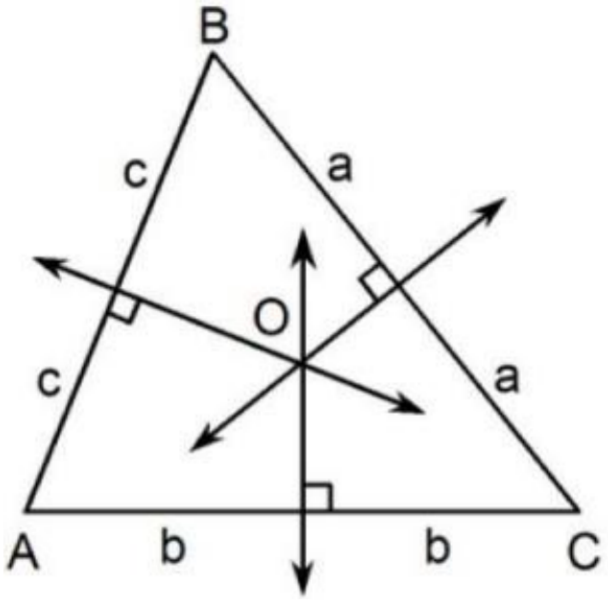
En todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interno y las bisectrices de los ángulos externos correspondientes a los otros dos vértices, se intersecan en un punto denominado Excentro (E).



E_c: Excentro relativo a $\overline{AB}$

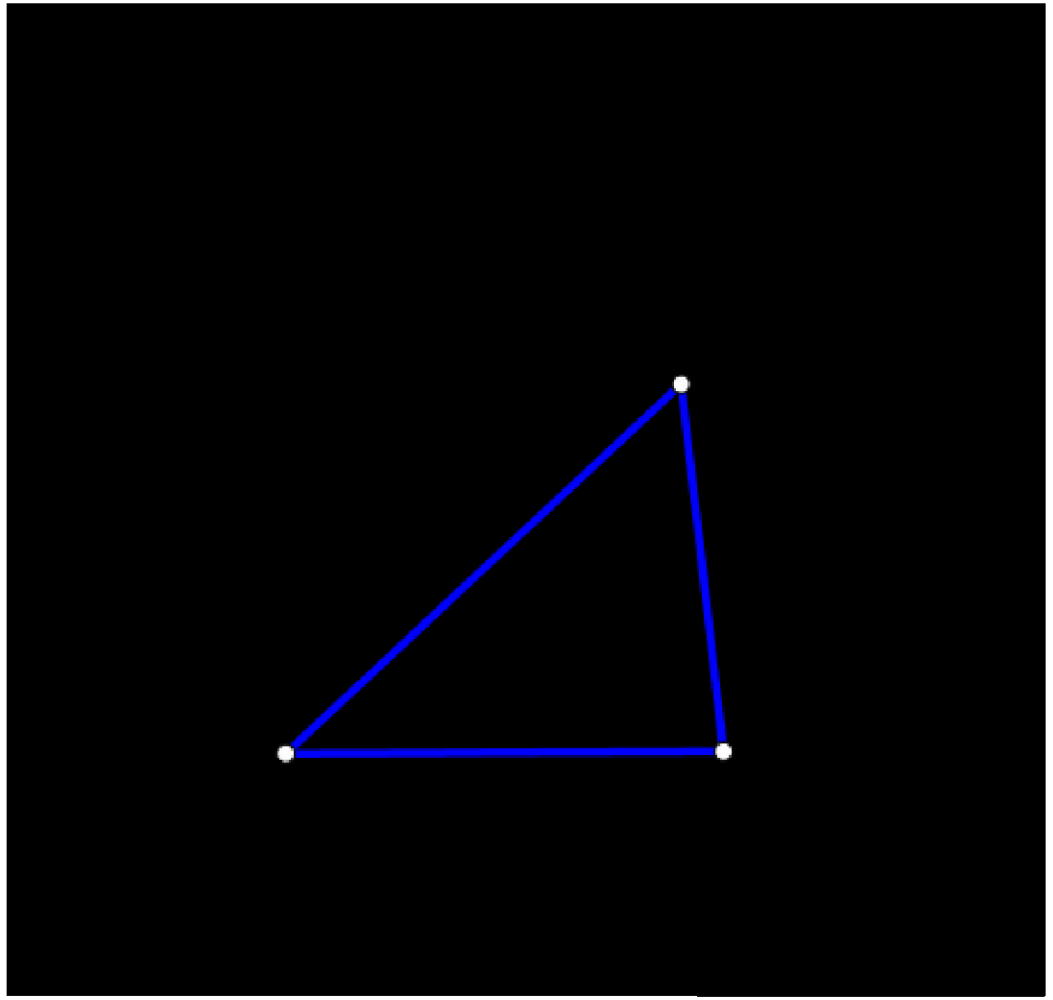
5) Circuncentro

En todo triángulo las mediatrices, referentes a cada uno de sus lados, concurren en un punto denominado Circuncentro (O).



O: Circuncentro

MOMENTO DE PRACTICAR



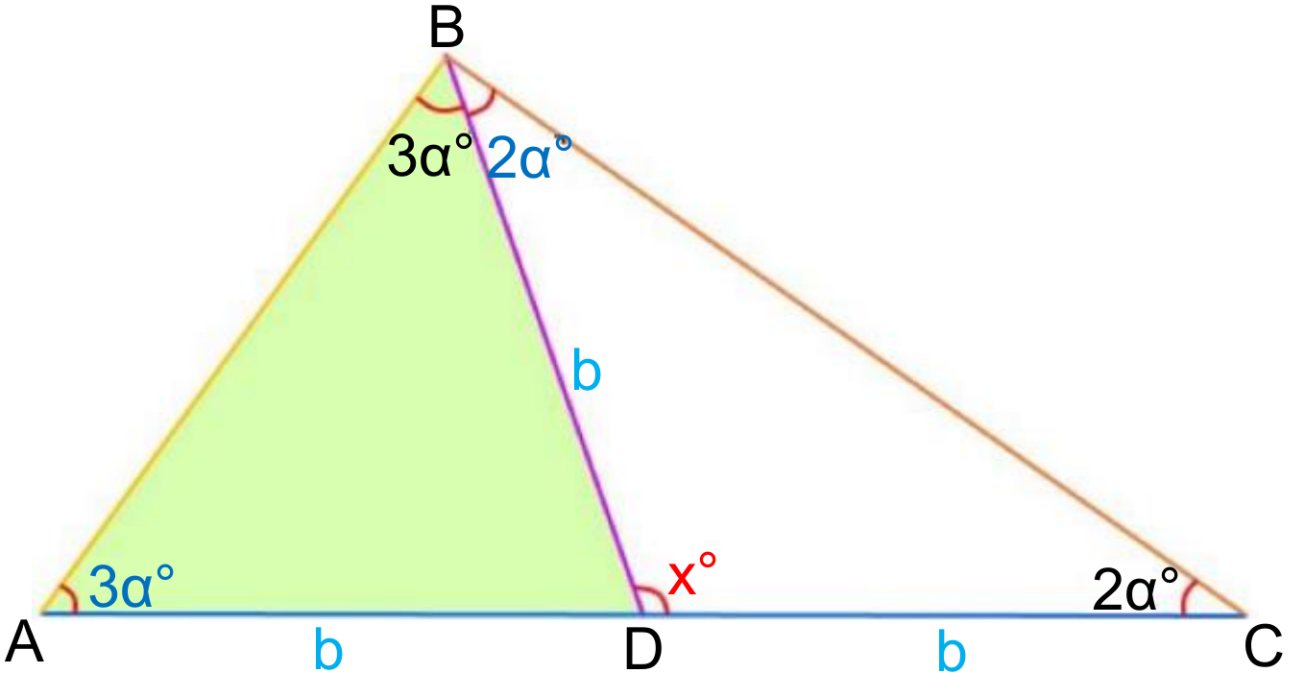
PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

EJERCICIO

01. En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BD}$. Si 2(m∠BAC)=3(m∠DBC) y BD=AD, entonces m∠BDC es:

A) 98
B) 104
C) 108
D) 114
E) 118

Resolución:



Se pide: $m\angle BDC = x$

Datos: $BD = AD$ y $\dfrac{m\angle BAC}{m\angle DBC} = \dfrac{3}{2}$

$$\rightarrow m\angle BAC = 3\alpha \quad y \quad m\angle DBC = 2\alpha$$

Se observa que los triángulos ADB y BDC son isósceles, luego:

$$m\angle ABD = 3\alpha \qquad (AD = DB = b)$$
$$m\angle BCD = 2\alpha \qquad (BD = DC = b)$$

Ahora en el triángulo ABC:

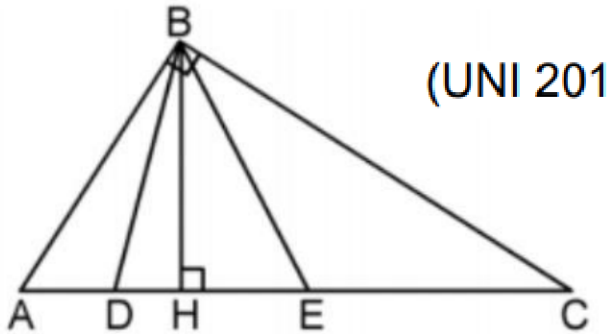
$$3\alpha + (3\alpha + 2\alpha) + 2\alpha = 180$$
$$\rightarrow \alpha = 18$$

Finalmente, por ángulo exterior, en el triángulo ABD:

$$x = 3\alpha + 3\alpha$$
$$\therefore x = 6\alpha = 108$$

EJERCICIO

02. En la figura, el triángulo ABC recto en B, $\overline{BH}$ es la altura, $\overline{BD}$ es la bisectriz del ángulo ABH, $\overline{BE}$ es la bisectriz del ángulo HBC. Si AB=7 u y BC=24 u, calcular el valor del segmento DE (en u).



(UNI 2013-2)

Resolución:

Piden DE = x

Del gráfico: $2\theta + 2\alpha = 90$

$\rightarrow m\angle C = 2\theta$; $m\angle A = 2\alpha$

Por propiedad el ΔDBC es isósceles:

BC = DC = 24

Por propiedad el ΔBAE es isósceles:

AB = AE = 7

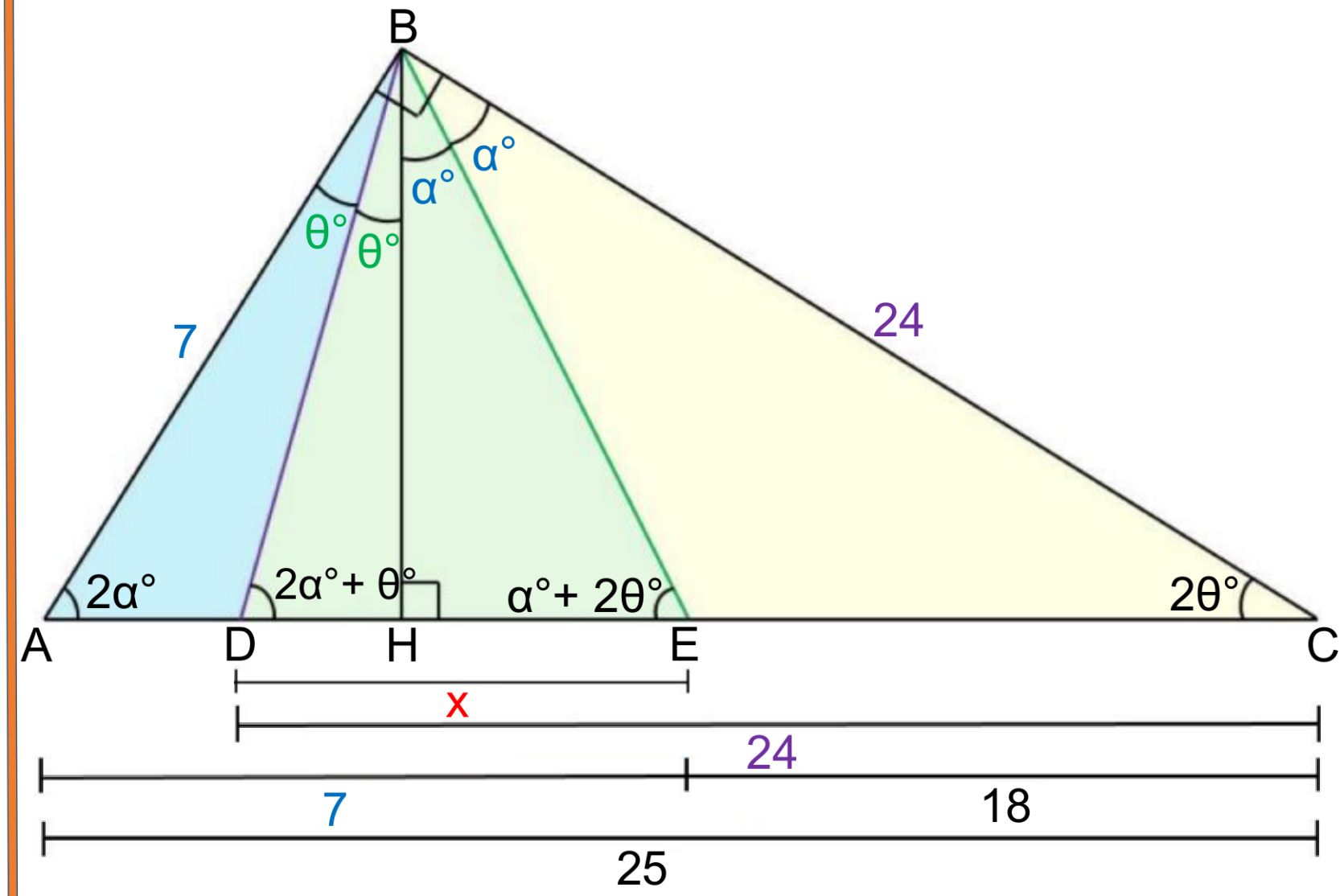
En ⊿ABC Por T. Pitágoras: $7^2 + 24^2 = (AC)^2$

$\rightarrow$ AC = 25 ; EC = 18

Por último: DC = DE + EC

24 = x + 18

∴ x = 6



EJERCICIO

03. En un triángulo ABC, la mediatriz $\overleftrightarrow{L}$ de $\overline{AC}$ interseca a la prolongación de la bisectriz interior $\overline{AD}$ en P. Si $\overleftrightarrow{L} \cap \overline{DC}$={E}, DP=PE y m∠DPE=40, halle la medida del ángulo ABC.

A) 50
B) 60
C) 45
D) 72
E) 36

Resolución:

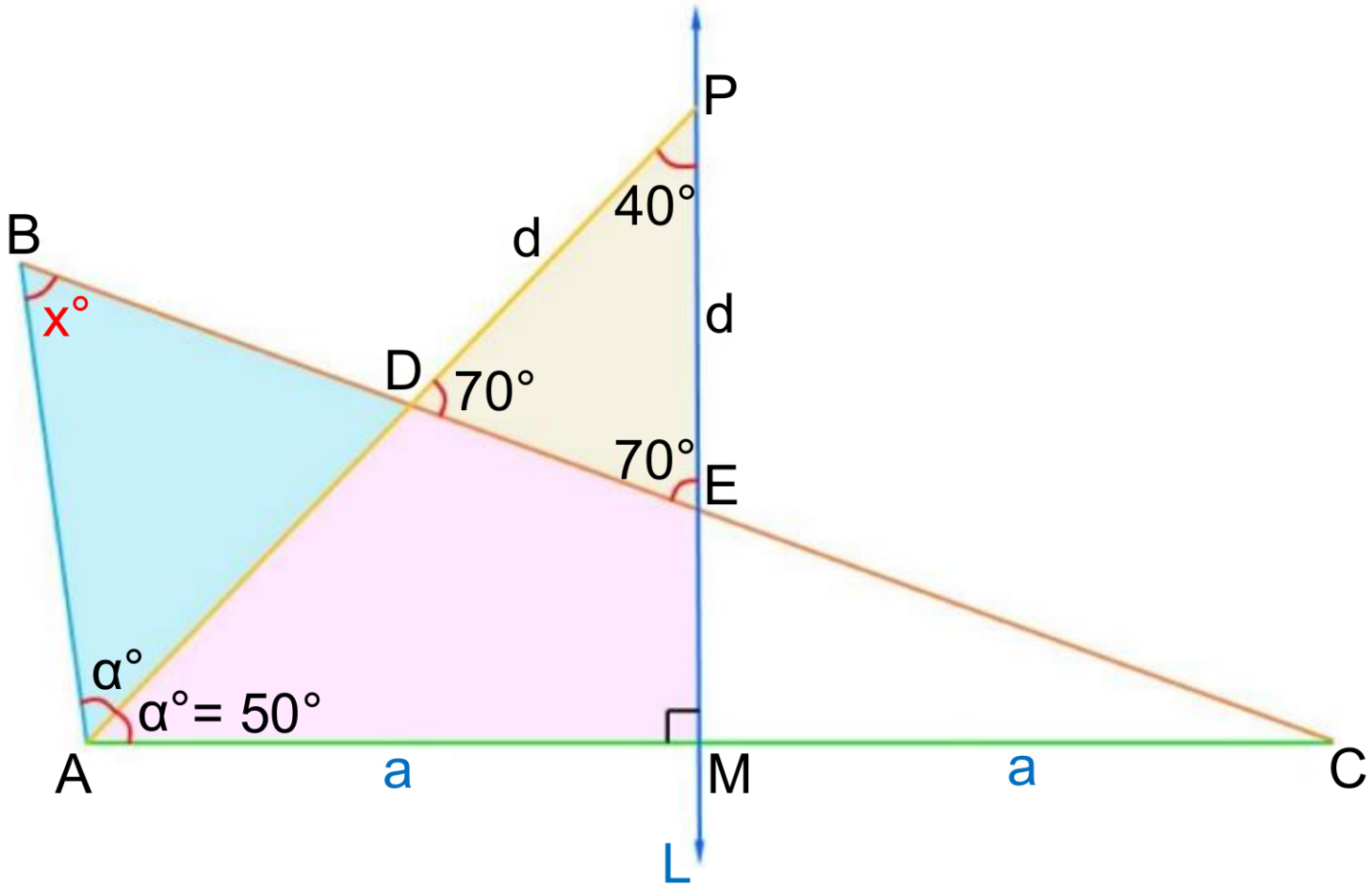
Se pide: $m\angle ABC = x$

Datos: $DP = PE$ y $m\angle DPE = 40$

En ΔDPE (isósceles):

$$m\angle PDE = m\angle PED = 70$$

En ΔPMA: $\alpha = 50$



Finalmente, por michi:

$$x + \alpha = 40 + 70$$

$$x + 50 = 110$$

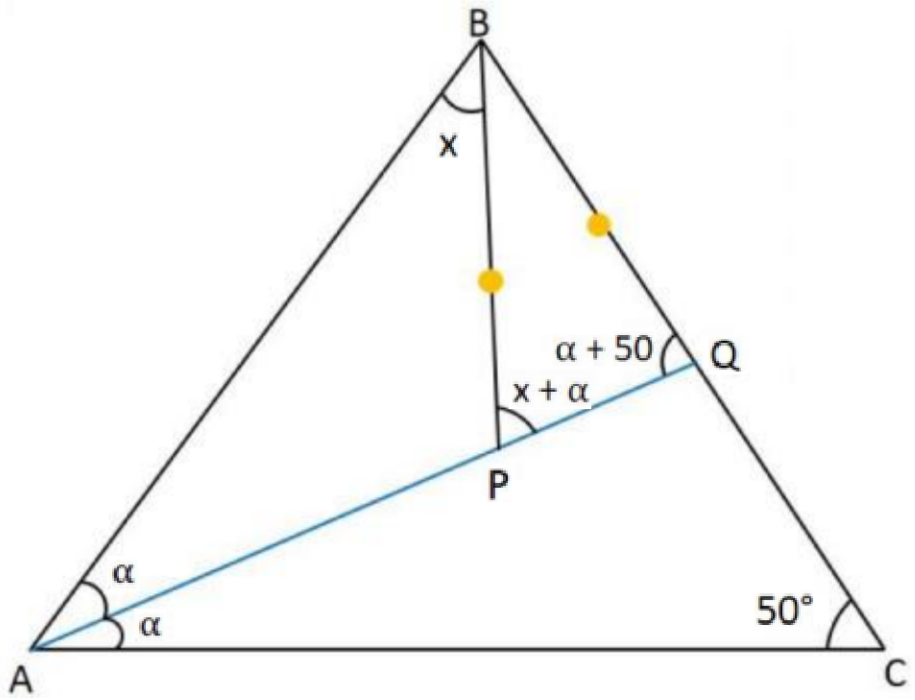
$$\therefore x = 60$$

EJERCICIO

04. Se tiene un triángulo ABC en el cual se traza la bisectriz interior $\overline{AQ}$; en $\overline{AQ}$ se ubica el punto P tal que BP=BQ. Si m∠C=50, calcular m∠ABP.

A) 50
B) 40
C) 30
D) 25
E) 35

Resolución:



Piden: m∠ABP = x

En ΔABP por∠exterior: m∠BPQ = x + α

En ΔAQC por∠exterior: m∠BQP = α + 50

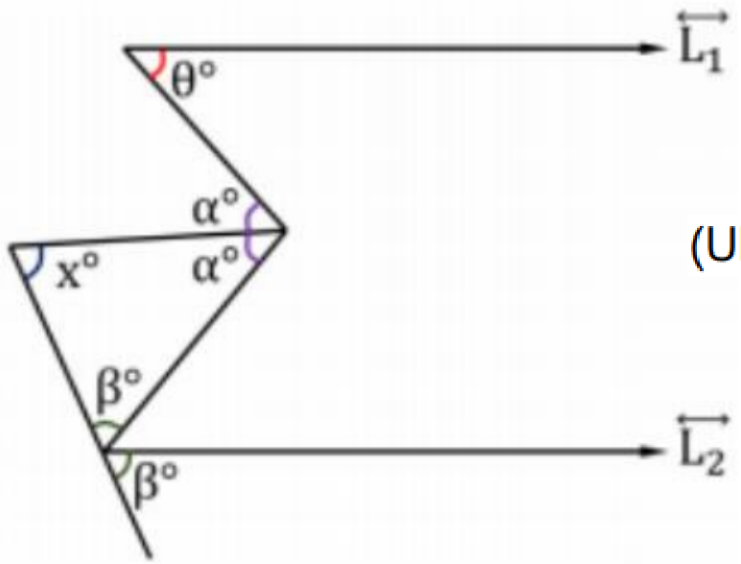
En ΔBPQ isósceles: → m∠BPQ = m∠BQP

$x + \alpha = \alpha + 50$

$\therefore\ x = 50$

EJERCICIO

05. Sabiendo que $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$ y θ es la medida de un ángulo agudo, calcule el mínimo valor entero de x.



(UNI 2019-1)

Resolución:

Piden: $x_{mín}$, $x \in \mathbb{Z}$.

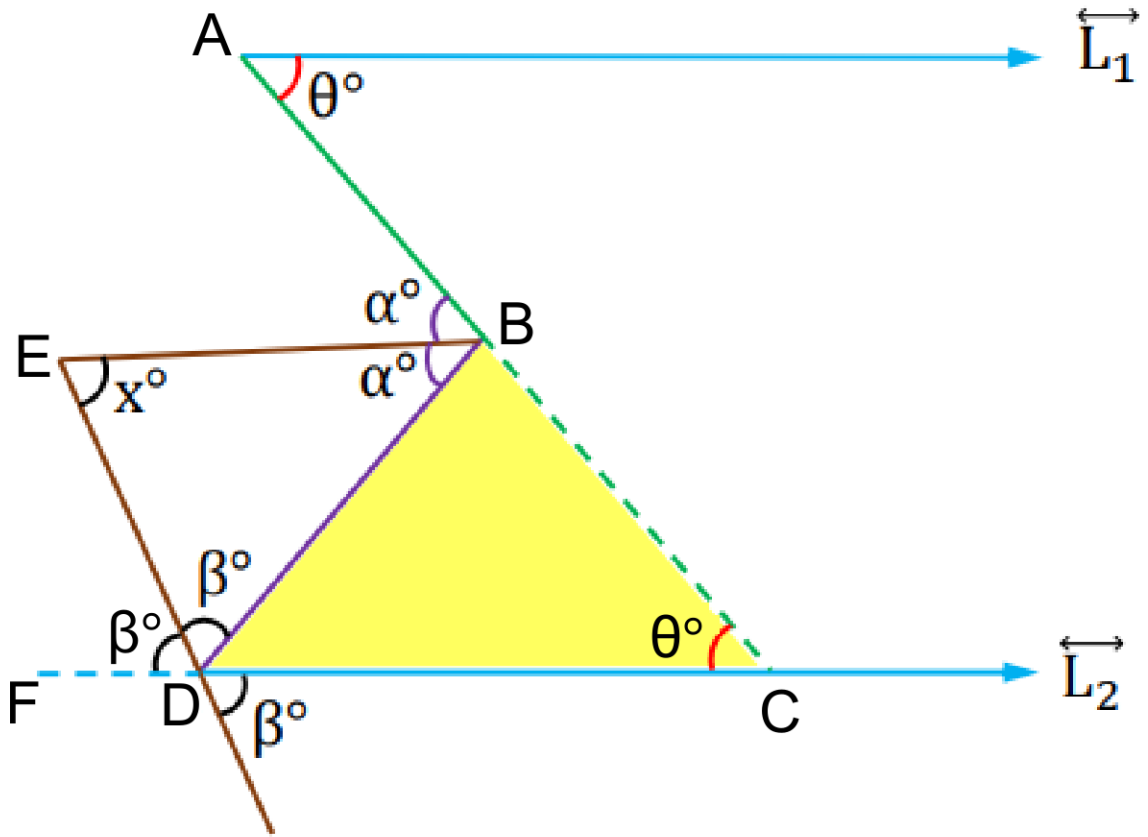
Se prolonga $\overline{AB}$ hasta cortar a $\overleftrightarrow{L_2}$ en el punto C, luego por ángulos alternos entre paralelas:

$$m\angle BCD = \theta$$

Prolongamos $\overline{CD}$ hasta el punto F, luego:

$$m\angle FDE = \beta$$

En el triángulo BCD: E es excentro relativo a $\overline{BD}$



Por propiedad: $x = 90 - \frac{\theta}{2} \rightarrow \theta = 2(90 - x)$

Por dato: $\theta < 90$

$\rightarrow 2(90 - x) < 90$

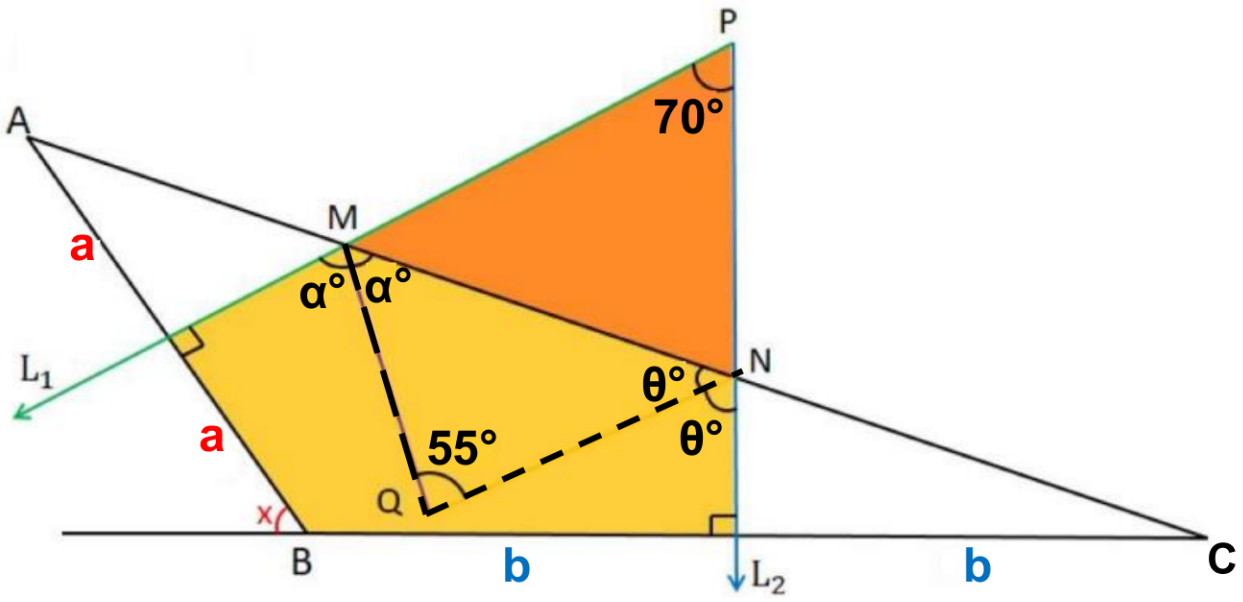
$\rightarrow 45 < x$

$\therefore\ x_{Mínimo} = 46$

EJERCICIO

06. Se tiene un triángulo ABC obtuso en B las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan a $\overline{AC}$ en M y N respectivamente. Si las bisectrices de los ángulos obtusos en M y en N se cortan en Q y m∠MQN=55; calcular la medida del ángulo exterior en B.

Resolución:



Piden x

Tengamos en cuenta que: $\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \{P\}$

<u>En ΔMNP</u>

$$m\measuredangle MQN = 90 - \frac{m\measuredangle MPN}{2}$$

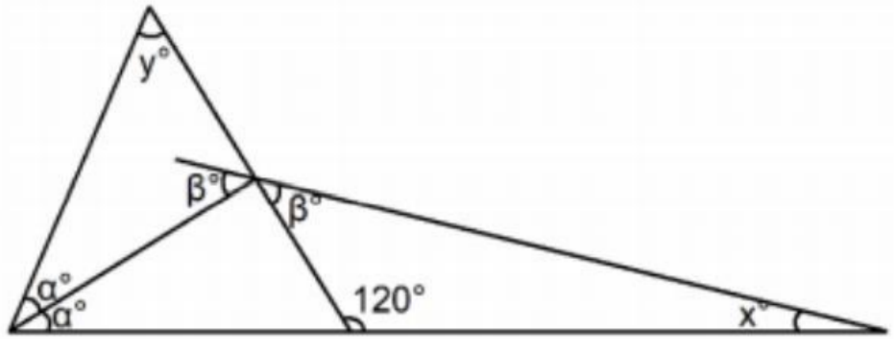
$\rightarrow m\measuredangle MPN = 70$

Por último por propiedad:

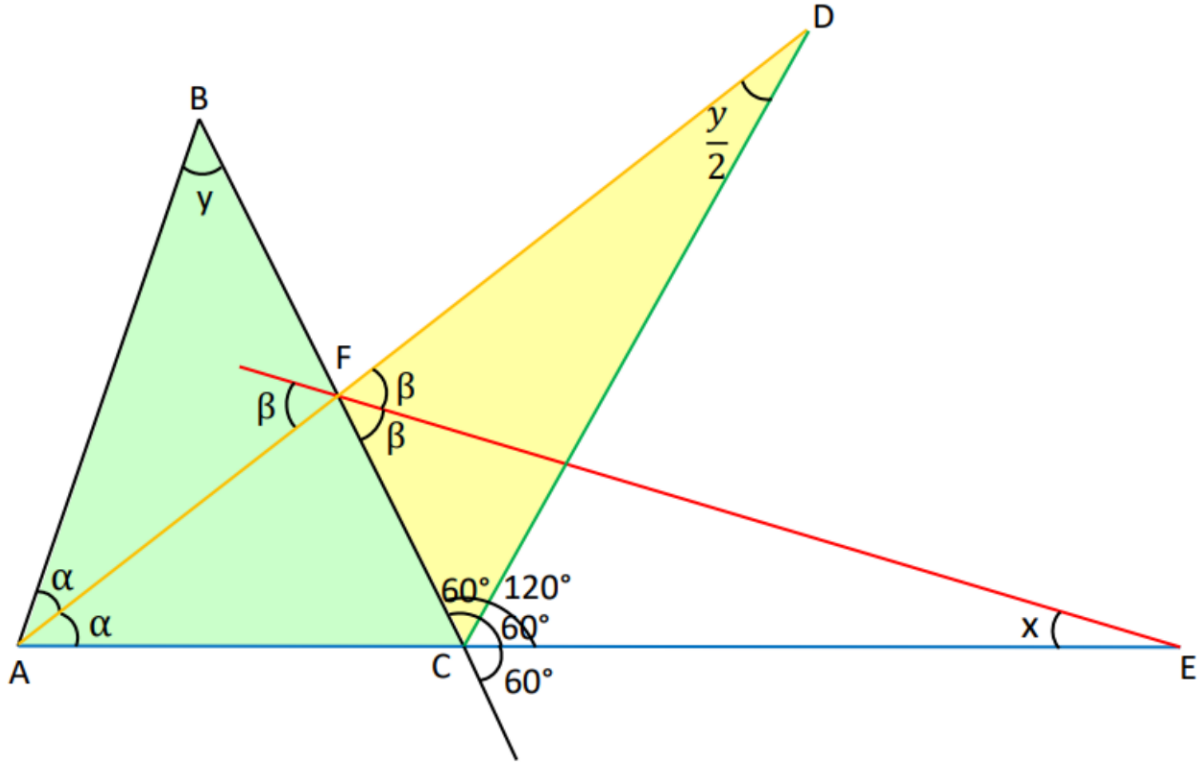
$\therefore x = 70$

EJERCICIO

07. A partir de la figura, calcule x/y.



Resolución:



Piden: x/ y

Prolongamos $\overline{AF}$ y trazamos la bisectriz del ∡FCE, tal que se interceptan en D.

En ΔABC:

Por propiedad:

$$m\measuredangle ADC = \frac{y}{2}$$

Luego, Prolongamos $\overline{BC}$

Por último En ΔFDC

Notamos que $\overline{CE}$ es bisectriz exterior del ángulo C.

$$\rightarrow x = \frac{y}{4}$$

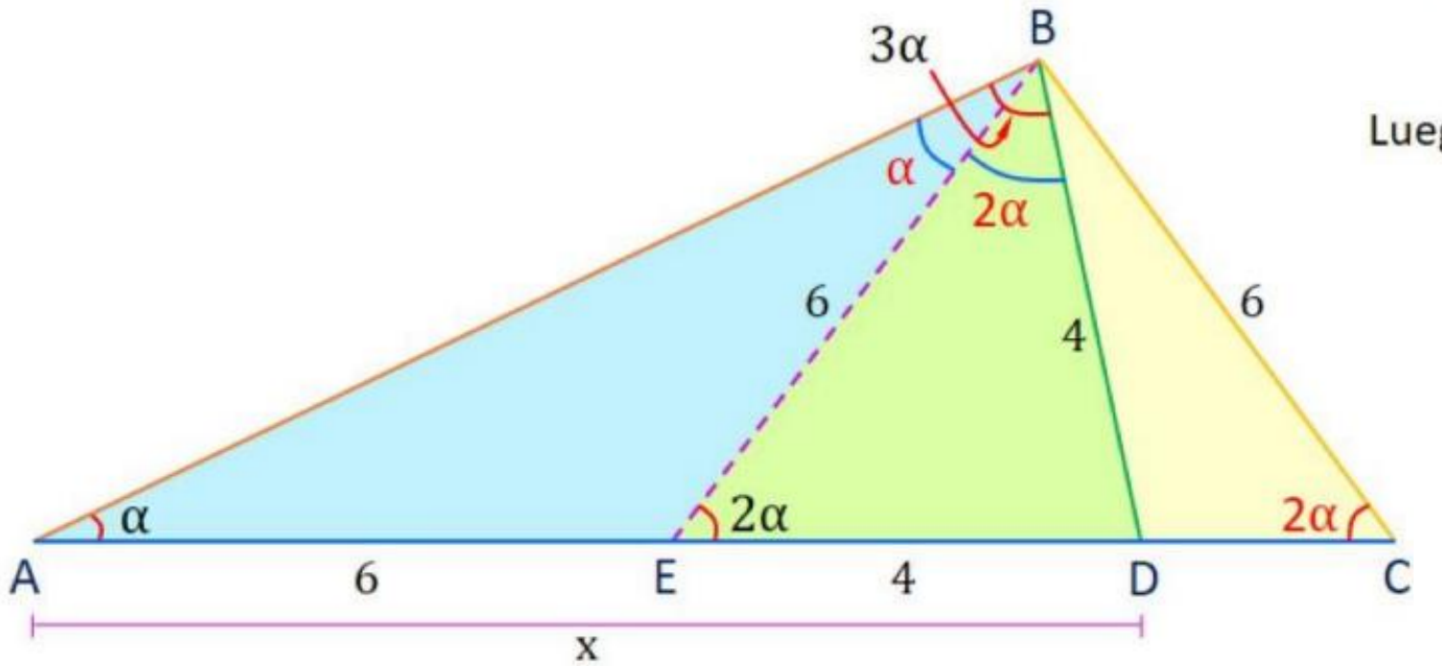
$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{1}{4}$$

EJERCICIO

08. En el triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BD}$, tal que: BC=6, BD=4 y 2(m∠ABD)=3(m∠BCD)=6(m∠BAD); calcular AD.

A) 6
B) 8
C) 5
D) 12
E) 10

Resolución:



Se pide: $AD = x$

Dato: $2(m\angle ABD) = 3(m\angle BCD) = 6(m\angle BAD)$

$\rightarrow 2(m\angle ABD) = 3(m\angle BCD) = 6(m\angle BAD) = 6\alpha$

$\rightarrow m\angle ABD = 3\alpha, \quad m\angle BCD = 2\alpha$

$y \; m\angle BAD = \alpha$

Se traza $\overline{BE}$ tal que: $m\angle ABE = \alpha$

$\rightarrow m\angle EBD = 2\alpha \quad y \; m\angle BED = 2\alpha$

Luego:

$BD = ED = 4 \quad (\Delta BDE: \text{Isósceles})$

$BC = BE = 6 \quad (\Delta EBC: \text{Isósceles})$

$BE = EA = 6 \quad (\Delta AEB: \text{Isósceles})$

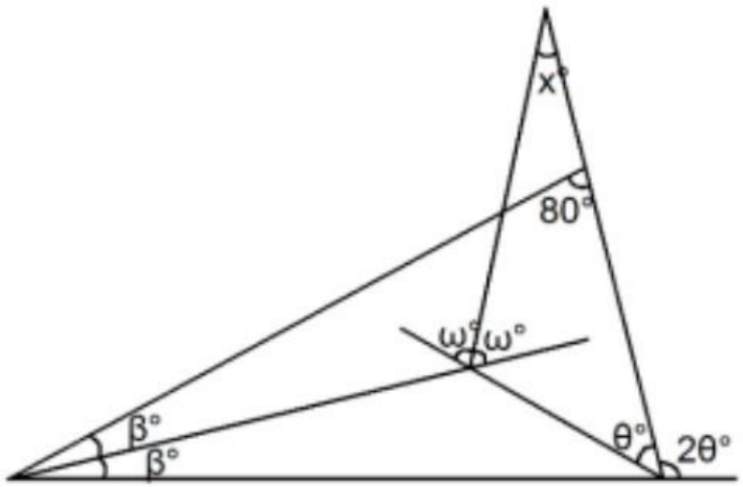
Finalmente:

$x = 6 + 4$

$\therefore x = 10$

EJERCICIO

09. En el siguiente gráfico calcular el valor de x.



Resolución:

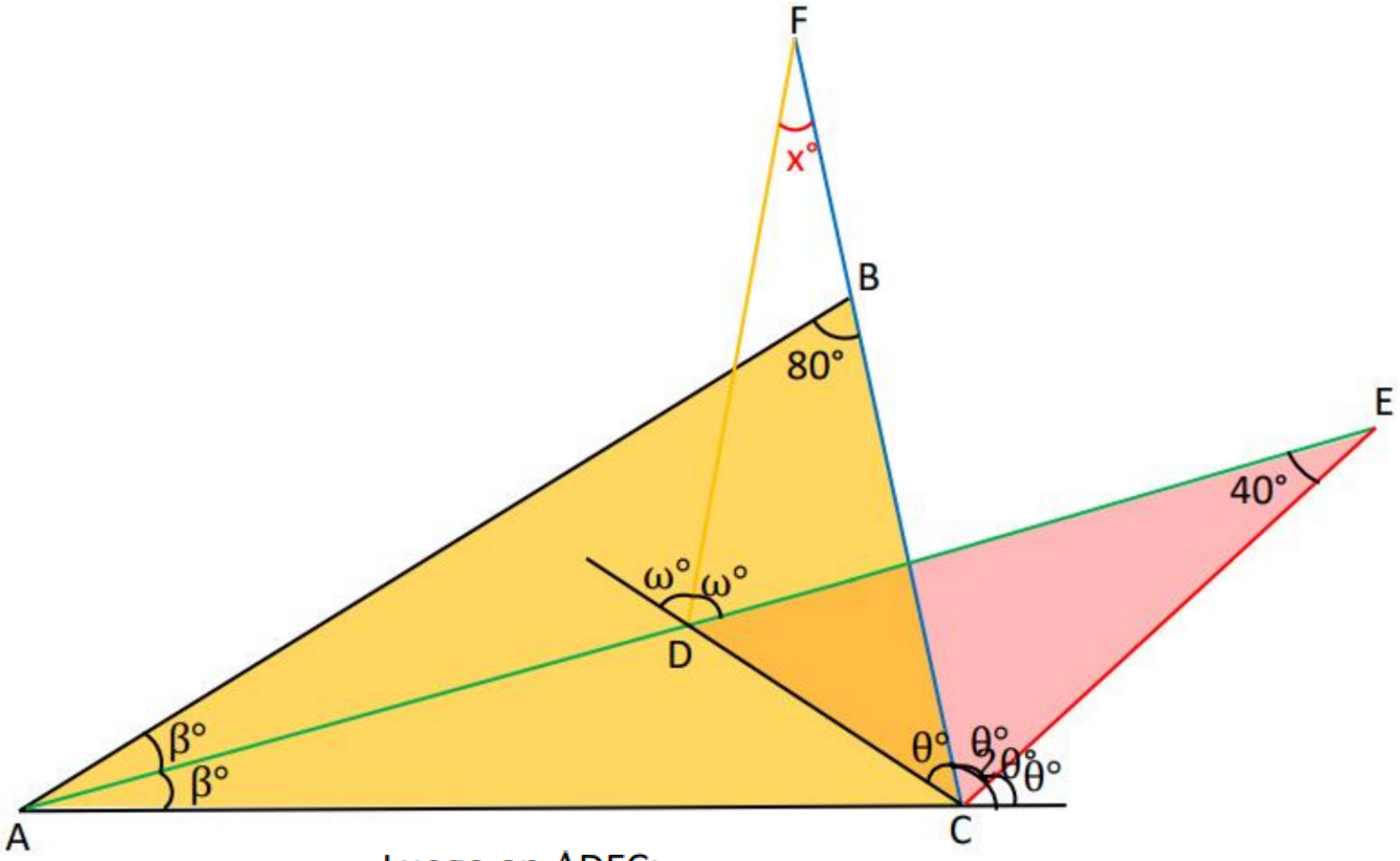
Piden x

Prolongamos $\overline{AD}$ y trazamos la bisectriz del ángulo externo en C tal que se interceptan en E.

En ΔABC:

Por propiedad: m∡DEC = $\frac{80}{2}$

→ m∡DEC = 40



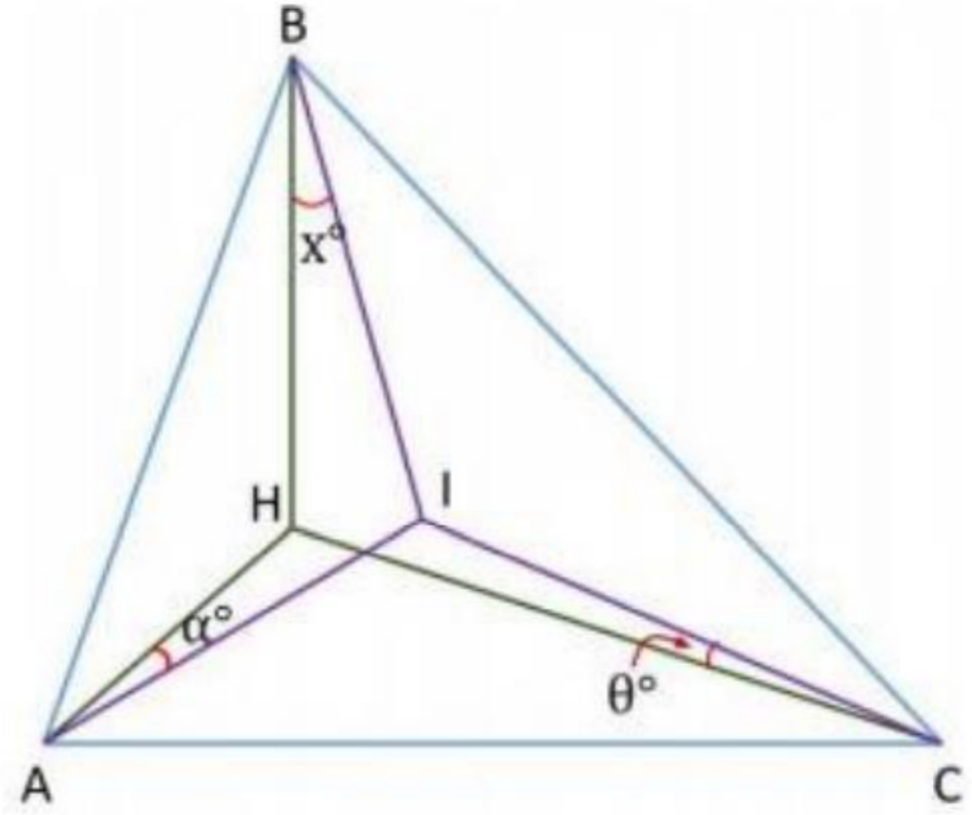
Luego en ΔDEC:

Por propiedad: x = $\frac{40}{2}$

$\therefore x = 20$

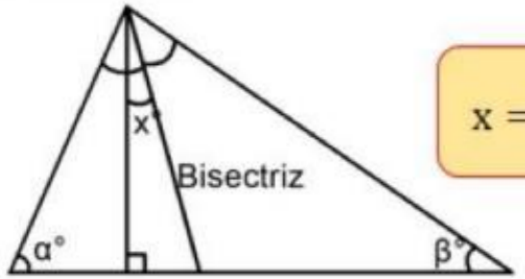
EJERCICIO

10. En el gráfico H e I son el ortocentro y el incentro del triángulo ABC, luego se cumple que:



Resolución:

PROPIEDAD



$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Por propiedad: $x = \dfrac{m\angle A - m\angle C}{2}$

Además: $\alpha = \dfrac{m\angle B - m\angle C}{2}$

$\theta = \dfrac{m\angle A - m\angle B}{2}$ (+)

$$\alpha + \theta = \frac{m\angle A - m\angle C}{2}$$

$$\therefore x = \alpha + \theta$$

CLAVES

- **PARA EL ALUMNO:**

01	02	03	04	05
C	A	A	C	E
06	**07**	**08**	**09**	**10**
D	A	C	D	A

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS